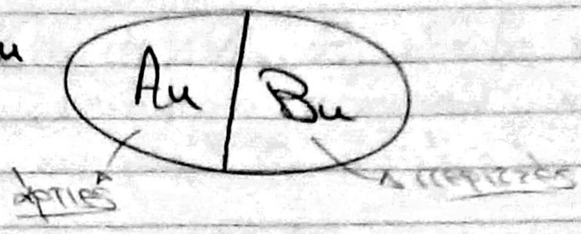
9/5/2018

• S_4



• $A_4 \trianglelefteq S_4$. Είναι η A_4 αβελιανή;

$\longrightarrow (1,2,3)\circ(1,2,4) = (1,3)(2,4)$
$\neq$
$(1,2,4)\circ(1,2,3) = (1,4)(2,3)$

$\Big\{$ Για $n \geq 4$ η A_n ΔΕΝ είναι αβελιανή!

• $V_4 = \{ I, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$

$\boxed{\text{• Πρόταση}}$ Η V_4 είναι κανονική υποομάδα της S_4 και της A_4

• Απόδειξη: Θδο. $gV_4g^{-1} \subseteq V_4$

• Έστω: $g\sigma g^{-1} \in gV_4g^{-1}$, όπου $\sigma \in V_4$

(i) Για $\boxed{\sigma = I}$: $g\sigma g^{-1} = gIg^{-1} = gg^{-1} = I \in V_4$

(ii) Για $\boxed{\sigma = (i,j)(k,l)}$, έχω:

$$g\sigma g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \end{pmatrix} (i,j)(k,l) \begin{pmatrix} g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (g(i), g(j))(g(k), g(l)) \in V_4.$$

• Άρα $\boxed{V_4 \trianglelefteq S_4}$ & $\boxed{V_4 \trianglelefteq A_4}$

▶ Ορισμός Μια ομάδα G λέγεται απλή, αν έχει μόνο δύο κανονικές υποομάδες.

▶ Άσκηση Έστω $H \leq G$. Δείξτε ότι η $gHg^{-1} \leq G$, όπου $g \in G$.

▶ Λύση: (i) Για $e \in G \xRightarrow{H \leq G} e \in H \Rightarrow g \cdot e \cdot g^{-1} = gg^{-1} = e \in gHg^{-1}$

$\Rightarrow e \in gHg^{-1} \Rightarrow \boxed{gHg^{-1} \neq \emptyset}$

(ii) Έστω $x, y \in gHg^{-1} \Rightarrow x = gag^{-1}$ & $y = gbg^{-1}$

• $x * y^{-1} = (gag^{-1})(g b^{-1} g^{-1}) = g(a \cdot b^{-1})g^{-1} \in gHg^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{gHg^{-1} \leq G}$

▶ Άσκηση Έστω $g \in G$ και $H \leq G$. Δείξτε ότι:

$$|H| = |gHg^{-1}|$$

▶ Λύση: Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi : H \to gHg^{-1}$, με $\boxed{\varphi(h) = ghg^{-1}}$

(i) Έστω $\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \Rightarrow gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1} \xrightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{κανόνας}}$

$\Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow \boxed{\varphi \text{ 1-1}}$

(ii) Προφανώς και είναι επί, αφού $(\forall x \in gHg^{-1})$, έχω:

$$x \in gHg^{-1} \Rightarrow x = ghg^{-1} = \varphi(h) \quad , \forall x \in gHg^{-1}$$

• Άρα, αφού η φ είναι επί και "1-1", τα σύνολα H και gHg^{-1} είναι ισοπληθικά. Άρα:

$$\boxed{|H| = |gHg^{-1}|}$$

$\boxed{\blacktriangleright \text{Άσκηση 1 } (\Phi.6)}$

▸ Λύση: Έστω $g \in G$. Τότε: $\boxed{gHg^{-1} \leq G}$ & $\boxed{o(gHg^{-1}) = o(H)}$

• Η gHg^{-1} είναι υποομάδα της G, τάξης $o(H)$. Όμως, γνωρίζουμε ότι έχουμε μία μόνο υποομάδα τάξης $o(H)$, την ίδια την H.

Άρα: $\boxed{H \trianglelefteq G}$

$\boxed{\blacktriangleright \text{Άσκηση}}$ Έστω $(G, *)$ ομάδα και a, b στοιχεία πεπερασμένης τάξης, με την ιδιότητα: $\boxed{a * b = b * a}$. Υποθέτουμε ότι ο μ.κ.δ. των $ord(a)$ και $ord(b)$ είναι 1. Δείξτε ότι:

$$\boxed{ord(a \cdot b) = ord(a) \cdot ord(b)}$$

Λύση: • Έστω $ord(\alpha)=m$ & $ord(b)=n$, τ/ω $\boxed{(m,n)=1}$.

Έστω $ord(\alpha b)=k$. Τότε:

$$(\alpha b)^{mn} = \dots = (\alpha^{m})^{n}\cdot(b^{n})^{m} = 1^{n}\cdot 1^{m} = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = ord(\alpha b) \mid m\cdot n}$$

• Έχω: $ord(\alpha b)=k \Rightarrow (\alpha b)^{k}=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha^{k}\cdot b^{k}=1}$$

• $(\alpha^{k}\cdot b^{k})^{n}=1^{n} \Rightarrow \alpha^{kn}\cdot(b^{n})^{k}=1 \Rightarrow \alpha^{kn}=1$

$$\Rightarrow \boxed{m \mid k n} \quad (1)$$

• $(\alpha^{k}\cdot b^{k})^{m}=1^{m} \Rightarrow (\alpha^{m})^{k}\cdot b^{km}=1 \Rightarrow b^{km}=1$

$$\Rightarrow \boxed{n \mid k m} \quad (2)$$

• Από (1) & (2) $\begin{cases} m \mid kn \\ n \mid km \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \mid k \\ n \mid k \end{cases}$ $(m,n)=1$

$$\Rightarrow \boxed{m\cdot n \mid k}$$

• Και αφού δείξαμε πριν, ότι $\boxed{k \mid m\cdot n}$, έχουμε:

$$k = m\cdot n \Rightarrow ord(\alpha b) = m\cdot n$$

$$\Rightarrow \boxed{ord(\alpha b) = ord(\alpha)\cdot ord(b)}$$

Άσκηση Έστω G ομάδα, με $|G| < 300$

Και: $\begin{cases} H \leq G, \ \tau/\omega : o(H) = 24 \\ K \leq G, \ \tau/\omega : o(K) = 54 \end{cases} \Rightarrow o(G) = ?$

• **Λύση**: Από Θ. Lagrange: $24 \mid o(G)$, $54 \mid o(G)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow o(G) = \text{ΕΚΠ}[24, 54] \Rightarrow \boxed{o(G) = 216}$